数理解析研究所講究録
628巻 1987年 45-65

On the Loewy structure of the projective indecomposable modules for the group $\Gamma(3^3)$

信州大教養　二宮　晏　(Yasushi Ninomiya)

Kを標数$p>0$の代数的閉体とし，Gを有限群とする。群多元環KGに対して，以下KG-加群は有限生成なKG-加群のこととする。KGの根基をJとすると，KG-加群Mに対して，$J^{l-1}M\neq 0$，$J^{l}M=0$をみたす自然数lが存在する。そのときMの部分加群の列

$$M\supset JM\supset J^2M\supset\cdots\cdots\supset J^{l}M=0$$

をMのLoewy列といい，lをMのLoewy lengthという。一方Mのsocleを$soc(M)$で表わし，$soc_i(M)$を次のように定める：
$soc_0(M)=0$, $soc_1(M)=soc(M)$, $soc_i(M)/soc_{i-1}(M)=soc(M/soc_{i-1}(M))$.
そのとき，上と同じlに対して，$soc_{l-1}(M)\neq M$, $soc_l(M)=M$となる。Mの部分加群の列

$$0\subset soc_1(M)\subset soc_2(M)\subset\cdots\cdots\subset soc_l(M)=M$$

をMのsocle列という。

次に群Gに対して，その最大の正規p部分群を$O_p(G)$で表

わし，最大の正規p'部分群を$O_{p'}(G)$で表わす（p'群とは位数がpで割れない群のこと）。さらに，$\bar{G}=G/O_{p'}(G)$における最大の正規p部分群$O_p(\bar{G})$のGにおける原像を$O_{p'p}(G)$と表わし，同様に$O_{p'pp'}(G)$によってGにおける$O_{p'}(G/O_{p'p}(G))$の原像を表わす。この操作を続けて，Gの特性部分群の列

$$1 \subset O_{p'}(G) \subset O_{p'p}(G) \subset O_{p'pp'}(G) \subset \cdots\cdots$$

を得る。この列がGに到達するとき，Gをp可解群という。そして，その列における剰余群でp群であるものの個数をGのp length という。

Gがp length 1 の群であるとき，即ち$G=O_{p'pp'}(G)$をみたすとき，KGの直既約射影加群の Loewy 列を求めることはそれほどむづかしいことではない。例えばGがp群のときは，既約加群は自明なものに限られる。したがってKG自身が唯一つの直既約射影加群であって，その Loewy 列を求めるには，根基のべきJ^kの次元を求めればよいことになる。一方その次元の求め方は Jennings [2] によって与えられている。それ故，この場合直既約射影加群の Loewy 列を求めることは原理的には可能である。また，Gがpべき零群，即ち$G=O_{p'p}(G)$をみたすときは，KGはGのあるp部分群D_iの群多元環上の行列環の直和$\oplus_i (KD_i)_{n_i}$に同型であることが知られている（[8], [13]）。したがって，この場合は本質的にp群の場合と同様

であると考えてよい。さらにp群の場合も含めて，GのSylow p部分群が正規であるとき，KGの直既約射影加群のLoewy列とsocle列は一致することが知られている([5])。

他方Gのp lengthが2以上であるとき，直既約射影KG加群のLoewy列を求めることはむずかしく，それに関する一般的な話も少ない。この場合で，具体的に求められているのは，$G=S_4$（4次の対称群），$p=2$の場合([1])と$G=(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)\rtimes SL(2,3)$，$G=(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)\rtimes GL(2,3)$，$p=3$の場合([3],[4])のみである。ここでは，ある種の3 length 2の群について，その直既約射影加群のLoewy列を決定したことを報告する。

§1. 群$\Gamma(p^m)$の定義. pを素数，mを自然数とし，$F=GF(p^m)$，$F^*=F-\{0\}$とおく。次のようなF上の変換のなす集合

$$\Gamma(p^m)=\{F\ni x\to ax^\alpha+b \mid a\in F^*, b\in F, \alpha\in \mathrm{Aut}\,F\}$$

は位数$p^m(p^m-1)m$の可解群である。実際，

$$U=\{F\ni x\to x+b \mid b\in F\}$$

$$H=\{F\ni x\to ax+b \mid a\in F^*, b\in F\}$$

は$\Gamma(p^m)$の正規部分群であって，UはFの加法群に同型，$H/U\cong F^*$，$\Gamma(p^m)/H\cong \mathrm{Aut}\,F$であるから，Uは位数$p^m$の基本可

換群，H/U は位数 p^m-1 の巡回群，$\Gamma(p^m)/H$ は位数 m の巡回群である。

$$V=\{F\ni x\to ax \mid a\in F^*\}$$

$$W=\{F\ni x\to x^\alpha \mid \alpha\in \mathrm{Aut}\,F\}$$

とおくと，V，W はそれぞれ位数 p^m-1，m の巡回群であって $H=U\rtimes V$，$\Gamma(p^m)=H\rtimes W$ となっている。p および m が小さいときは，次のような同型が成立する：$\Gamma(3^1)\cong S_3$，$\Gamma(2^2)\cong S_4$.

次に r を任意の自然数とし，上記の m として rp をとる。そのとき上述の如く，$\Gamma(p^{rp})$ は位数 $p^{rp}(p^{rp}-1)rp$ の可解群である。今，$\Gamma(p^{rp})$ の部分群として

$$G_{p,r}=\{F\ni x\to ax^\alpha+b \mid a\in\langle\lambda^{p^r-1}\rangle,\ b\in F,\ \alpha\in Gal(F/GF(p^r))\}$$

をとる。ここで λ は群 F^* の生成元，即ち $F^*=\langle\lambda\rangle$ である。群 $G_{p,r}$ の位数は $p^{rp+1}(p^{rp}-1)/(p^r-1)$ であるが，その群多元環 $KG_{p,r}$ の根基のべき零指数が $(rp+1)(p-1)+1$ であることが Motose [9] により証明されている。一般に位数 p^ag $(p\nmid g)$ の p 可解群Gに対して，KG の根基のべき零指数の下限は $a(p-1)+1$ であることが Wallace [14] により示されている。これに対し，G の Sylow p 部分群が基本可換群であれば，根基のべき零指数は $a(p-1)+1$ に一致する（[10]）が，上記 Motose の結果は，Sylow p 部分群が可換群でなくても根基のべき零指数が下限と一致する群の例があることを示している。しかし現在まで

のところ，そのような群の構造は決定されていない。それ故，そのような群多元環に関する種々の情報を得ることが必要と思われる。この様な観点から，群 $G_{3,1}$ および $\Gamma(3^3)$ に対してそれらの直既約射影加群の Loewy を以下において述べる。

以後 Loewy 列および socle 列に関して次の記号を用いる。群多元環 KG の加群 M に対して，M の Loewy 列における k 番目の剰余加群 $J^{k-1}M/J^kM$ を $L_k(M)$ で表わす。各 k に対して

$$L_k(M) \cong X_{k1} \oplus X_{k2} \oplus \cdots \oplus X_{km_k} \quad (X_{kj} \text{ は既約加群})$$

であって，M の Loewy length が ℓ であるとき，X の Loewy 列を次のように書くことにする。

$$M = \begin{array}{l} X_{11} \cdots\cdots X_{1r_1} \\ X_{21} \cdots\cdots\cdots\cdots X_{2r_2} \\ \vdots \\ X_{\ell 1} \cdots X_{\ell r_\ell} \end{array}$$

一方，M の socle 列における k 番目の剰余加群 $soc_i(M)/soc_{i-1}(M)$ を $S_i(M)$ で表わす。

§2. 結果. 以後，$p=3$，$G=G_{3,1}$，$T=\Gamma(3^3)$ とする。まず，G について述べる。§1 で述べたように，G は次の様に定義される $F=GF(3^3)$ 上の変換からなる位数 $3^4\cdot 13$ の可解群である。

$$G = \{ F \ni x \to a x^{3^i} + b \mid a \in \langle \lambda^2 \rangle,\ b \in F,\ i = 0, 1, 2 \},$$

ただし $\langle \lambda \rangle = F^*$. 次の変換が G の生成元となっている.

$$a : x \to x+1, \quad b : x \to x+\lambda, \quad c : x \to x+\lambda^2$$

$$v : x \to \lambda^2 x, \quad s : x \to x^3.$$

$U = \langle a, b, c \rangle$, $V = \langle v \rangle$, $W = \langle s \rangle$ とおくと, U は位数 3^3 の基本可換群, V, W はそれぞれ位数 13, 3 の巡回群であって $G = (U \rtimes V) \rtimes W$ である。$H = U \rtimes V$ とおく。$H/U \cong V$ であるから KH は 13 個の非同型な既約加群をもち, それらは v の作用により決定される。多項式 $X^{13} - 1$ の $GF(3)$ 上における既約多項式への分解は

$$X^{13} - 1 = (X-1)(X^3 - X^2 - X - 1)(X^3 + X^2 + X - 1)(X^3 - X - 1)(X^3 + X^2 - 1)$$

であることから, ζ を多項式 $X^3 - X^2 - X - 1$ の 1 つの根とすると, $\{\zeta, \zeta^3, \zeta^9\}$, $\{\zeta^{12}, \zeta^{10}, \zeta^4\}$, $\{\zeta^2, \zeta^6, \zeta^5\}$, $\{\zeta^{11}, \zeta^7, \zeta^8\}$ がそれぞれ多項式 $X^3 - X^2 - X - 1$, $X^3 + X^2 + X - 1$, $X^3 - X - 1$, $X^3 + X^2 - 1$ の根のなす集合である。そこで, V_0 を自明な既約 KH-加群とし, 表現

$$v \to \zeta, \quad v \to \zeta^3, \quad v \to \zeta^9, \quad v \to \zeta^{12}, \quad v \to \zeta^{10}, \quad v \to \zeta^4,$$

$$v \to \zeta^2, \quad v \to \zeta^6, \quad v \to \zeta^5, \quad v \to \zeta^{11}, \quad v \to \zeta^7, \quad v \to \zeta^6$$

に対応する既約 KH-加群をそれぞれ, $V_1, V_2, V_3, \cdots, V_{12}$ とすれば, $V_0, V_1, V_2, \cdots, V_{12}$ が既約 KH-加群の同型類の代表を与える。V_1, V_2, V_3, V_7, V_8, V_9 の双対加群はそれぞれ V_4, V_5, V_6,

V_{10}, V_{11}, V_{12} に同型である。さらに諸導加群について次が成立する。

$$V_0^G = \begin{matrix} I \\ I \\ I \end{matrix}, \quad V_{i+j}^G \cong V_i^G \quad (i=1,4,7,10,\ j=1,2),$$

ここで I は自明な既約 KG-加群。そこで，$M_1 = V_1^G$, $M_2 = V_4^G$, $M_3 = V_7^G$, $M_4 = V_{10}^G$ とおくと，I, M_1, M_2, M_3, M_4 が既約 KG-加群の同型類の代表となっている。M_1, M_3 の双対加群は M_2, M_4 に同型である。既約 KG-加群 X に対し，その射影被覆を P_X で表わすことにする。

定理 A. 直既約射影 KG-加群の Loewy 列は次のように与えられる。

$$P_I = \begin{matrix} I \\ I\ M_1 \\ I\ M_1\ M_2\ M_3 \\ I\ M_1\ M_2\ M_3\ M_3\ M_4 \\ I\ M_1\ M_2\ M_3\ M_3\ M_4\ M_4 \\ I\ M_1\ M_2\ M_3\ M_4\ M_4 \\ I\ M_1\ M_2\ M_4 \\ I\ M_2 \\ I \end{matrix} \qquad P_{M_1} = \begin{matrix} M_1 \\ M_2\ M_2\ M_3 \\ I\ M_1\ M_3\ M_3\ M_4\ M_4 \\ I\ M_1\ M_2\ M_3\ M_4\ M_4 \\ I\ M_1\ M_1\ M_2\ M_4 \\ I\ M_1\ M_2 \\ I\ M_2\ M_3 \\ I\ M_3\ M_4 \\ M_1 \end{matrix}$$

$$P_{M_2} = \begin{array}{c} M_2 \\ I\ M_3\ M_4 \\ I\ M_1\ M_2\ M_3\ M_4 \\ I\ M_1\ M_1\ M_2\ M_4 \\ I\ M_1\ M_2\ M_2\ M_3 \\ I\ M_2\ M_3\ M_3\ M_4 \\ I\ M_1\ M_3\ M_4 \\ M_1\ M_4 \\ M_2 \end{array} \qquad P_{M_3} = \begin{array}{c} M_3 \\ M_1\ M_3\ M_4 \\ M_1\ M_2\ M_2\ M_3\ M_4\ M_4 \\ I\ M_1\ M_2\ M_2\ M_3\ M_4\ M_4 \\ I\ I\ M_2\ M_3\ M_4 \\ I\ I\ M_1 \\ I\ M_1 \\ M_1\ M_2\ M_3 \\ M_3 \end{array}$$

$$P_{M_4} = \begin{array}{c} M_4 \\ M_1\ M_2\ M_4 \\ I\ M_1\ M_2\ M_2\ M_3\ M_4 \\ I\ I\ M_2\ M_3\ M_3\ M_4 \\ I\ I\ M_1\ M_4 \\ I\ M_1\ M_1\ M_3 \\ M_1\ M_2\ M_3 \\ M_2\ M_3\ M_4 \\ M_4 \end{array}$$

次にΓについて述べる。Γは次の様なF上の変換からなる位数 $2\cdot 3^4\cdot 13$ の可解群である。

$$\Gamma = \{ F \ni x \to a x^{3^i} + b \mid a \in F^*,\ b \in F,\ i = 0, 1, 2 \}.$$

GはΓの指数2の部分群で，変換

$$F \ni x \to -x$$

をtで表わし，$T=\langle t\rangle$とおくと，$\Gamma=G\rtimes T$となっている。一方，tとsは可換であるから，$\Gamma=(U\rtimes(V\times T))\rtimes W$と表わすことも出来る。$T$は位数2であるから$KT$は2個の既約加群をもつ。それらを$Z_0$(自明な加群)，$Z_1$にて表わす。$V_0, V_1, \cdots, V_{12}$を$KV$-加群とみると，

$$U_i = V_i \otimes_K Z_0, \quad W_i = V_i \otimes_K Z_1 \quad (0 \leqq i \leqq 12)$$

は既約$KV\times T$-加群の同型類の代表を与える。ところで，$Q=U\rtimes(V\times T)$とおくと，同型$Q/U\cong V\times T$により，これらの加群をKQ-加群とみることが出来，実はこれらの加群が既約KQ-加群の同型類の代表となっている。これらの既約KQ-加群の誘導加群については次が成立する。

$$U_0^\Gamma = \begin{matrix} K \\ K \\ K \end{matrix}, \quad W_0^\Gamma = \begin{matrix} J \\ J \\ J \end{matrix}, \quad U_{i+j}^\Gamma \cong U_i^\Gamma, \quad W_{i+j}^\Gamma \cong W_i^\Gamma \quad \left(\begin{matrix} i=1,4,7,10 \\ j=1,2 \end{matrix}\right),$$

ここで，Kは自明な既約$K\Gamma$-加群，Jは自明でない1次の$K\Gamma$-加群．そこで，

$$L_1 = U_1^\Gamma, \quad L_2 = U_4^\Gamma, \quad L_3 = U_7^\Gamma, \quad L_4 = U_{10}^\Gamma,$$
$$N_1 = W_1^\Gamma, \quad N_2 = W_4^\Gamma, \quad N_3 = W_7^\Gamma, \quad N_4 = W_{10}^\Gamma$$

とおくと，K, J, L_i, N_i $(1\leqq i\leqq 4)$が既約$K\Gamma$-加群の同型類の代表であり，L_1, L_3, N_1, N_3の双対加群がそれぞれL_2, L_4, N_2, N_4に同型である。既約$K\Gamma$-加群Zに対してその射影被覆をP_Zで表わすと，KG-加群と$K\Gamma$-加群の間には次の関係が

成立する。

1) $K|_G \cong J|_G \cong I$, $L_i|_G \cong N_i|_G \cong M_i$, $1 \leqq i \leqq 4$.

2) $I^\Gamma \cong K \oplus J$, $M_i^\Gamma \cong L_i \oplus N_i$, $1 \leqq i \leqq 4$.

3) $P_I^\Gamma \cong P_K \oplus P_J$, $P_{M_i}^\Gamma \cong P_{L_i} \oplus P_{N_i}$, $1 \leqq i \leqq 4$.

4) すべての k に対して,

$$L_k(P_I)^\Gamma \cong L_k(P_K) \oplus L_k(P_J),$$

$$L_k(P_{M_i})^\Gamma \cong L_k(P_{L_i}) \oplus L_k(P_{N_i}), \quad 1 \leqq i \leqq 4.$$

5) すべての k に対して,

$$\dim_K L_k(P_{M_i}) = \dim_K L_k(P_{L_i}) = \dim_K L_k(P_{N_i}), \quad 1 \leqq i \leqq 4.$$

定理 B. 直既約射影 $K\Gamma$-加群の Loewy 列は次のように与えられる.

$$P_K = \begin{array}{c} K \\ K\ N_1 \\ K\ L_2\ L_3\ N_1 \\ J\ L_2\ L_3\ N_1\ N_3\ N_4 \\ J\ L_1\ L_2\ L_3\ L_4\ N_3\ N_4 \\ J\ L_1\ L_4\ N_2\ N_3\ N_4 \\ K\ L_1\ L_4\ N_2 \\ K\ N_2 \\ K \end{array} \qquad P_J = \begin{array}{c} J \\ J\ L_1 \\ J\ L_1\ N_2\ N_3 \\ K\ L_1\ L_3\ L_4\ N_2\ N_3 \\ K\ L_3\ L_4\ N_1\ N_2\ N_3\ N_4 \\ K\ L_2\ L_3\ L_4\ N_1\ N_4 \\ J\ L_2\ N_1\ N_4 \\ J\ L_2 \\ J \end{array}$$

$$P_{L_1} = \begin{array}{c} L_1 \\ N_2\ N_2\ N_3 \\ K\ L_1\ L_3\ L_3\ L_4\ L_4 \\ K\ N_1\ N_2\ N_3\ N_4\ N_4 \\ K\ L_1\ L_2\ L_4\ N_1 \\ J\ L_2\ N_1 \\ J\ L_2\ L_3 \\ J\ N_3\ N_4 \\ L_1 \end{array}$$

$$P_{N_1} = \begin{array}{c} N_1 \\ L_2\ L_2\ L_3 \\ J\ N_1\ N_3\ N_3\ N_4\ N_4 \\ J\ L_1\ L_2\ L_3\ L_4\ L_4 \\ J\ L_1\ N_1\ N_2\ N_4 \\ K\ L_1\ N_2 \\ K\ N_2\ N_3 \\ K\ L_3\ L_4 \\ N_1 \end{array}$$

$$P_{L_2} = \begin{array}{c} L_2 \\ J\ N_3\ N_4 \\ J\ L_1\ L_2\ L_3\ L_4 \\ J\ L_1\ N_1\ N_2\ N_4 \\ K\ L_1\ L_2\ N_2\ N_3 \\ K\ L_3\ L_4\ N_2\ N_3 \\ K\ L_3\ L_4\ N_1 \\ N_1\ N_4 \\ L_2 \end{array}$$

$$P_{N_2} = \begin{array}{c} N_2 \\ K\ L_3\ L_4 \\ K\ N_1\ N_2\ N_3\ N_4 \\ K\ L_1\ L_2\ L_4\ N_1 \\ J\ L_2\ L_3\ N_1\ N_2 \\ J\ L_2\ L_3\ N_3\ N_4 \\ J\ L_1\ N_3\ N_4 \\ L_1\ L_4 \\ N_2 \end{array}$$

$$P_{L_3} = \begin{array}{c} L_3 \\ N_1\ N_3\ N_4 \\ L_1\ L_2\ L_2\ L_3\ L_4\ L_4 \\ J\ N_1\ N_2\ N_2\ N_3\ N_4\ N_4 \\ K\ J\ L_2\ L_3\ L_4 \\ K\ J\ L_1 \\ K\ L_1 \\ N_1\ N_2\ N_3 \\ L_3 \end{array}$$

$$P_{N_3} = \begin{array}{c} N_3 \\ L_1\ L_3\ L_4 \\ N_1\ N_2\ N_2\ N_3\ N_4\ N_4 \\ K\ L_1\ L_2\ L_2\ L_3\ L_4\ L_4 \\ K\ J\ N_2\ N_3\ N_4 \\ K\ J\ N_1 \\ J\ N_1 \\ L_1\ L_2\ L_3 \\ N_3 \end{array}$$

$$
P_{L_4} = \begin{array}{c}
L_4 \\
N_1\ N_2\ N_4 \\
K\ L_1\ L_2\ L_2\ L_3\ L_4 \\
K\ J\ N_2\ N_3\ N_3\ N_4 \\
K\ J\ \ L_4\ N_1 \\
J\ L_1\ L_3\ N_1 \\
L_1\ L_2\ L_3 \\
N_2\ N_3\ N_4 \\
L_4
\end{array}
\qquad
P_{N_4} = \begin{array}{c}
N_4 \\
L_1\ L_2\ L_4 \\
J\ N_1\ N_2\ N_2\ N_3\ N_4 \\
K\ J\ L_2\ L_3\ L_3\ L_4 \\
K\ J\ \ L_1\ N_4 \\
K\ L_1\ N_1\ N_3 \\
N_1\ N_2\ N_3 \\
L_2\ L_3\ L_4 \\
N_4
\end{array}
$$

§3. 証明の概略.　定理Bは定理Aとその証明方法および§2, 2)〜5)等を用いることにより得られる。一方定理Aにおいて, P_{M_1}, P_{M_2}, P_{M_3}, P_{M_4} のLoewy列は同様の手法で得られる。そこで, ここでは P_I および P_{M_3} のLoewy列の求め方についてその概略を述べる。なお定理Aについては[11], 定理Bについては[12]において証明が与えられている。以後群Aに対し, 群多元環KAの根基をJ(KA)で表わし, Aの部分集合Bに対しKAの元 $\sum_{b\in B} b$ を $\hat{B}$ とおく。

1) P_I について.　$S = V \rtimes W$ とおき, 自明なKS-加群を $\hat{I}$, その射影被覆を $\hat{P}_{\hat{I}}$ とする。$\hat{P}_{\hat{I}}^G \cong P_I$ であるから $\hat{P}_{\hat{I}}^G$ のLoewy列を決定すればよい。$J(KS)^3 = 0$ に注意して,

$$(J(KS)^2 \hat{P}_{\hat{I}})^G = X, \quad (J(KS)\hat{P}_{\hat{I}})^G = Y, \quad \hat{P}_{\hat{I}}^G = Z$$

とおく。$\hat{P}_{\dot{\mathbb{1}}}$ を $KW\hat{V}$ と同一視してよいので，

$$X = KU\hat{V}\hat{W}, \quad Y = KU\hat{V}J(KW), \quad Z = KU\hat{V}KW$$

とおいてよい。$G/U \cong S$ および S が Frobenius 群であることから

$$J(KG) = KG\,J(KU) + \hat{V}J(KW)$$

であることがわかる。ところで，$\hat{V}KU\hat{V}$ の元は W の元と可換であるから，

$$\begin{aligned}\hat{V}J(KW)X &= \hat{V}J(KW)KU\hat{V}\hat{W}\\ &= J(KW)\hat{V}KU\hat{V}\hat{W}\\ &= (\hat{V}KU\hat{V})J(KW)\hat{W} = 0\end{aligned}$$

を得る。それ故

$$J(KG)^k X = J(KU)^k\hat{V}\hat{W}$$

を得る。これより，$\tilde{P}_{V_0}$ を V_0 の射影被覆とすると，

$$J(KG)^k X|_H \cong J(KH)^k \tilde{P}_{V_0}$$

を得る。一方 $\tilde{P}_{V_0}$ の Loewy 列は

$$\begin{matrix} V_0 \\ V_1\ V_2\ V_3 \\ V_4\ V_5\ V_6\ V_7\ V_8\ V_9 \\ V_0\ V_7\ V_8\ V_9\ V_{10}\ V_{11}\ V_{12} \\ V_1\ V_2\ V_3\ V_{10}\ V_{11}\ V_{12} \\ V_4\ V_5\ V_6 \\ V_0 \end{matrix}$$

であるから，

$$I|_H \cong V_0, \quad M_1|_H \cong V_1 \oplus V_2 \oplus V_3, \quad M_2|_H \cong V_4 \oplus V_5 \oplus V_6,$$
$$M_3|_H \cong V_7 \oplus V_8 \oplus V_9, \quad M_4|_H \cong V_{10} \oplus V_{11} \oplus V_{12}$$

に注意すると，X の Loewy 列は

$$X = \begin{array}{c} I \\ M_1 \\ M_2\ M_3 \\ I\ M_3\ M_4 \\ M_1\ M_4 \\ M_2 \\ I \end{array}$$

であることがわかる。次に Y については，

$$J(KG)^k Y = J(KU)^k \hat{V} J(KW) + J(KG)^{k-1} X$$

が成立する。これより次の包含関係を得る。

$$J(KG)^k Y \subset J(KG)^k Y + J(KG)^{k-2} X \subset J(KG)^{k-1} Y.$$

ところが，

$$J(KG)^k Y + J(KG)^{k-2} X / J(KG)^k Y \cong L_{k-1}(X),$$
$$J(KG)^{k-1} Y / J(KG)^k Y + J(KG)^{k-2} X \cong L_k(X)$$

が成立する。それ故

$$J(KG)^{k-1} Y / J(KG)^k Y \cong L_{k-1}(X) \oplus L_k(X)$$

を得る。これらのことから Y の Loewy 列は

$$
Y = \begin{array}{cc}
I & \\
M_1 & I \\
M_2\ M_3 & M_1 \\
I\ M_3\ M_4 & M_2\ M_3 \\
M_1\ M_4 & I\ M_3\ M_4 \\
M_2 & M_1\ M_4 \\
I & M_2 \\
 & I
\end{array}
$$

であることがわかる。Zについても同様に，

$$J(KG)^k Z = J(KU)^k \hat{V} J(KW) + J(KG)^{k-1} Y$$

が成立し，包含関係

$$J(KG)^k Z \subset J(KG)^k Z + J(KG)^{k-2} Y \subset J(KG)^{k-1} Z$$

および同型

$$J(KG)^k Z + J(KG)^{k-2} Y / J(KG)^k Z \cong L_{k-1}(Y),$$

$$J(KG)^{k-1} Z / J(KG)^k Z + J(KG)^{k-2} Y \cong L_k(X)$$

を得る。したがって

$$J(KG)^k Z / J(KG)^{k-1} Z \cong L_{k-1}(Y) \oplus L_k(X)$$

が成り立つ。この様にして P_I の Loewy 列は定理Aで述べたものであることがわかる。

P_{M_3} の Loewy 列について述べる前に上記の事実に関することを記しておく。序文で述べた直既約射影加群の Loewy 列の知られている例 S_4 $(p=2)$; $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes SL(2,3)$ $(p=3)$ についても，

P_I の Loewy 列は上記と同様の構造をしている。具体的に言うと，$G=S_4$，$p=2$ のとき，KG は 2 個の既約加群 I（自明な加群），M（2次の加群）をもつ。上記の X に対応する加群の Loewy 列は $\begin{array}{c} I \\ M \\ I \end{array}$ であって，P_I の Loewy 列は $\begin{array}{cc} I & \\ M & I \\ I & M \\ & I \end{array}$ である。一方，$G=(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)\rtimes SL(2,3)$，$p=3$ の場合，KG は 3 個の既約加群をもつ。それらをその次元で表示して，1，2，3 と表わすと，上記 X に対応する加群の Loewy 列は，$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}$ であって P_1 の Loewy 列は $\begin{array}{ccc} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{array}$ となっている。さらに，これらに関連する結果として次のような結果がある。

（Lorenz [7]）$G=(U\rtimes V)\rtimes W$，U：p群，V：p'群，W：位数 p^a の基本可換群とする。M を既約 KG-加群とし，$p^d \mid \dim M$，$p^{d+1}\nmid \dim M$ とする。そのとき，$S=V\rtimes W$ とおくと，M の射影被覆の Loewy length は

$$(a-d)(p-1)+(M/s)^G \text{ の Loewy length}$$

に等しい。

上記の観察から，Lorenz の結果において述べた条件をみたす群に対しては，P_I の Loewy 列は，自明な KS-加群 $\hat{I}$ の誘導加群 $\hat{I}^G$ の Loewy 列を 1 つずつ下げて $(a-1)(p-1)+1$ 個並べたものになっているのではないかと思われる。なお，自明でない加群についても，例えば，$(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)\rtimes SL(2,3)$，$p=3$ の場合，2 次の既約加群について上記と同様な状況が生じている。

2) P_{M_3} について．　V_7 の射影被覆を $\tilde{P}_{V_7}$ とすると，$P_{M_3}\cong\tilde{P}_{V_7}^G$ が成立する。一方，$\tilde{P}_{V_7}$ の Loewy 列は，

$$\tilde{P}_{V_7}=\begin{array}{c} V_7 \\ V_2\ V_9\ V_{10} \\ V_1\ V_4\ V_6\ V_8\ V_{11}\ V_{12} \\ V_0\ V_3\ V_5\ V_6\ V_7\ V_{11}\ V_{12} \\ V_0\ V_2\ V_3\ V_5\ V_9\ V_{10} \\ V_1\ V_4\ V_8 \\ V_7 \end{array}$$

である。これより，$i=0,1,2$ に対し

$$\left(J(KH)^i\tilde{P}_{V_7}/J(KH)^{i+1}\tilde{P}_{V_7}\right)^G\cong J(KG)^iP_{M_3}/J(KG)^{i+1}P_{M_3}$$

であることがわかる。よって $L_i(P_{M_3})$ $(i=1,2,3)$ は得られた。次に，

$$A = J(KH)^3\tilde{P}_{V_7} / J(KH)^5 \tilde{P}_{V_7} = \begin{array}{c} V_0\ V_3\ V_5\ V_6\ V_7\ V_{11}\ V_{12} \\ V_0\ V_2\ V_3\ V_5\ V_9\ V_{10} \end{array}$$

について考える。Aの剰余加群として

$$X = \begin{array}{c} V_0\ V_3\ V_5\ V_6\ V_7\ V_{11}\ V_{12} \\ V_0\ V_5\ V_9\ V_{10} \end{array} \qquad Y = \begin{array}{c} V_0\ V_3\ V_5\ V_6\ V_7\ V_{11}\ V_{12} \\ V_2\ V_3 \end{array}$$

をとる。$\hat{P}_{V_i}$ $(i=0, 5, 9, 10)$ のLoewy列は同時にSocle列であるから，それらを求めることにより，$S_2(X)$の組成因子としてV_0は生じないことがわかる。したがって

$$X = V_0 \oplus \begin{array}{c} V_3\ V_5\ V_6\ V_7\ V_{11}\ V_{12} \\ V_0\ V_5\ V_9\ V_{10} \end{array}$$

であり

$$X^G = \begin{array}{c} I \\ I \\ I \\ \end{array} \oplus \begin{array}{l} M_1\ M_2\ M_2\ M_3\ M_4\ M_4 \\ I\ \ M_2\ M_3\ M_4 \\ I \\ I \end{array}$$

を得る。一方，自然な単射 $A \to X \oplus Y$ が存在し，$S_2(A) \ni V_0$ であるから，$S_2(Y) \ni V_0$ でなければならない。したがって，Y^G のLoewy列は次のいずれかである。

(a)	(b)	(c)
$I\ M_1\ M_2\ M_2\ M_3\ M_4\ M_4$	$I\ M_1\ M_2\ M_2\ M_3\ M_4\ M_4$	$I\ M_1\ M_2\ M_2\ M_3\ M_4\ M_4$
I	I	$I\ M_1$
I	$I\ M_1$	I
$M_1\ M_1$	M_1	M_1

以上の事実から $L_4(P_{M_3})$ が得られ，

$$L_5(P_{M_3}) \supsetneq I \oplus I \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4,$$

$$L_6(P_{M_3}) \supsetneq I \oplus I,$$

$$L_7(P_{M_3}) \supsetneq I \oplus M_1$$

を得る。 KG のカルタン行列は

$$\begin{array}{c} P_I \\ P_{M_1} \\ P_{M_2} \\ P_{M_3} \\ P_{M_4} \end{array} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

であるから，以上のことから残された2個の M_1 と M_2, M_3 各1個づつについて，P_{M_3} の Loewy 列の何番目に生じるかを調べればよい。これについては，M_i に対応する原始巾等元を e_i とすると

$$\dim_K e_i J(KG)^k e_3 - \dim_K e_i J(KG)^{k+1} e_3$$

が $L_k(P_{M_3})$ の組成因子として生じる M_i の個数を表わすことから，具体的にこれを計算することにより最終的に決定する。

以上により，P_I および P_{M_3} の Loewy 列は得られる。それ故，次の結果

(Landrock [6]) 既約 KG-加群 M, N とその双対加群 M^*, N^* に対して, $L_k(P_M)$ の組成因子として生じる N の個数と $L_k(P_{N^*})$ の組成因子として生じる M^* の個数は同じである。

により, P_{M_1}, P_{M_2}, P_{M_4} の Loewy 列における I と M_4 の生じる場所がわかる。このことと P_{M_3} の場合と同様の手法を用いることにより P_{M_1}, P_{M_2}, P_{M_4} の Loewy 列は決定される。

References

[1] B. Huppert and N. Blackburn: Finite Groups II, Springer-Verlag, 1982.

[2] S. A. Jennings: The structure of the group ring of a p-group over a modular field, Trans. Amer. Math. Soc. 50(1941), 175-185.

[3] S. Koshitani: On the Loewy series of the group algebra of a finite p-solvable group with p-length > 1, Comm. Alg. 13 (1985), 2175-2198.

[4] S. Koshitani: On group algebras of finite groups, In Representation Theory II Groups and Orders: Lecture Notes in Math. 1178, Springer-Verlag, 1986, 109-128.

[5] P. Landrock: Some remarks on Loewy lengths of projective modules, In Representation Theory II: Lecture Notes in Math. 832, Springer-Verlag, 1980, 369-381.

[6] P. Landrock: Finite Group Algebras and their Modules, London Math. Soc. Lecture Note Series 84, Cambridge Univ. Press, 1983.

[7] M. Lorenz: On Loewy lengths of projective modules for p-solvable groups, Comm. Alg. 13(1985), 1193-1212.

[8] K. Morita: On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A4(1951), 177-194.

[9] K. Motose: On the nilpotency index of the radical of a group algebra III, J. London Math. Soc. 25(1982), 39-42.

[10] K. Motose and Y. Ninomiya: On the nilpotency index of the radical of a group algebra, Hokkaido Math. J. 4(1975), 261-264.

[11] Y. Ninomiya: On the Loewy structure of the projective indecomposable modules for a 3-solvable group I, Math. J. Okayama Univ. 29(1987), to appear.

[12] Y. Ninomiya: On the Loewy structure of the projective indecomposable modules for a 3-solvable group II, Math. J. Okayama Univ. 29(1987), to appear.

[13] M. Osima: On primary decomposable group rings, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 24(1942), 1-9.

[14] D. A. R. Wallace: Lower bounds for the radical of the group algebra of a finite p-soluble group, Proc. Edinburgh Math. Soc. 16(1968/69), 127-134.